

【知识点】移动平均法

移动平均法的思想：对于一个时间序列，假定在一个比较短的时间间隔里，序列的取值是比较稳定的，它们之间的差异主要是由于随机干扰造成的。根据这种假定，可以用一定时间间隔内的平均值作为下一期的估计值。

n 期简单移动平均是指用最近 n 期数据（包括当前数据）的平均值作为当期的移动平均值，其计算公式为： $\hat{y}_t = \frac{1}{n}(y_t + y_{t-1} + \cdots + y_{t-n+1})$ 。

移动平均法可以用来预测，即使用最近的移动平均值作为未来一个时期的预测值，如：

为预测 y_{t+1} ，可使用： $\hat{y}_t(1) = \frac{1}{n}(y_t + y_{t-1} + \cdots + y_{t-n+1})$

为预测 y_{t+2} ，可使用： $\hat{y}_t(2) = \frac{1}{n}(\hat{y}_t(1) + y_t + \cdots + y_{t-n+2})$

以此类推。

移动平均法中的期数选择对趋势拟合效果影响很大，确定移动平均的期数需要考虑如下方面：

(1) **时间序列是否有季节性**。如前面讨论的航空乘客人数是月度数据，有明显的季节波动，就应该做期数为 12 的移动平均，这样可以消除掉季节波动的影响，让趋势成分更明显。

(2) **对趋势平滑程度的要求**。如果想要得到更平滑的长期趋势，就需要增大期数。

(3) **趋势反映近期变动的敏感程度的要求**。用移动平均法获得事物发展的趋势具有滞后性，移动平均的期数越长，滞后性越强。如果希望得到的趋势拟合线能对近期的变动更敏感，可将期数设置的更少一点。

所以，如果想要将季节成分从时间序列中分离出来，可以使用周期长度作为移动平均的期数。如果更关注短期的趋势变化，则可使用更少的期数。反之，如果想得到长期趋势，则使用更多的期数。

【例 7.7】简单移动平均法是股票分析中被普遍运用的技术，使用移动平均法可以得到市场的趋势，是上升、下降还是横向运动，帮助判断买入或者卖出的时机。对 2020 年 10 月 1 日到 2021 年 1 月 5 日贵州茅台（股票代码：600519）每日股票的收盘价数据进行期数为 5 日、10 日和 20 日的移动平均。结果见图 7-7 所示，从中可以看到随着期数的增大，移动平均线越来越平缓，滞后性更强。

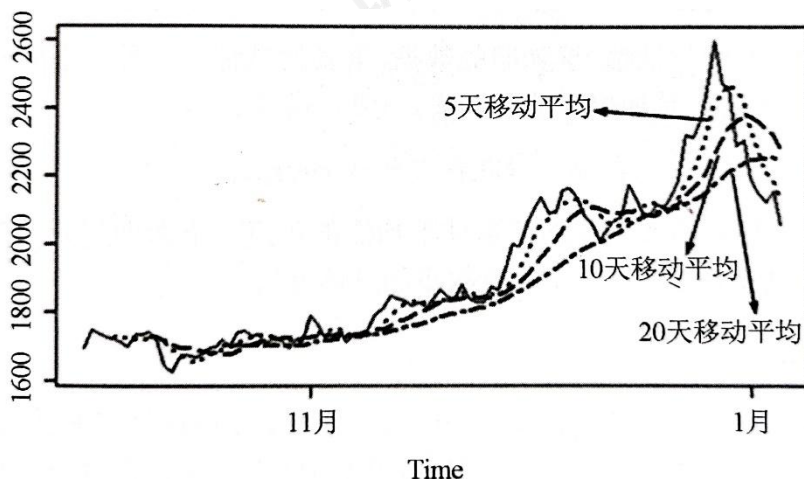


图 7-7 贵州茅台股票移动平均线

【例 7.8】对表 7-5 中的航空乘客人数序列分别进行期数为 5 和 12 的移动平均。从中可以看到当移动平均的期数刚好等于 12 的时候，季节性被消除了，趋势线更明显了。而期数为 5 时，仍然可以看到季节



性，每年固定的时间会有相同幅度和方向的波动规律。

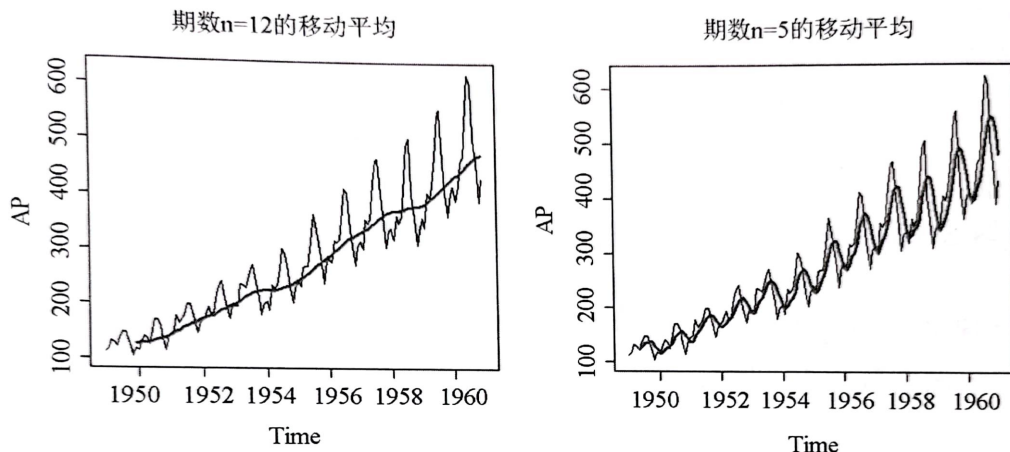


图 7-8 航空乘客人数的移动平均线

简单移动平均等于对平均周期内的每个数据同等对待，给它们的权重相同，都是 $1/n$ 。

但是经验告诉我们如果预测未来，近期的数据比更早期的数据更有参考价值，应该对近期的数据给予更高的权重。以 4 期移动平均为例：

$$\hat{y}_t(1) = \frac{1}{4}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3})$$

最近的 4 个数据的权重都是 $1/4$ 。

一般地，近期的数据参考价值更大，应当赋予更大的权重，所以可以调整各期的权重进行如下计算：

$$\hat{y}_t(1) = 0.4y_t + 0.3y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + 0.1y_{t-3}$$

即随着时间的推移，越陈旧的数据，重要性越低。这种对不同时期的数据分别赋予不同权重的方法就是**加权移动平均法**，一般公式如下：

$$\tilde{y}_t = w_1y_t + w_2y_{t-1} + \cdots + w_ny_{t-n+1}$$

但如何确定权重的大小是加权移动平均法的难点。

【知识点】指数平滑法

指数平滑法也是一种加权移动平均的方法，充分考虑了时间间隔对数据的影响，给出了设置权重的具体方法，即各期权重随着时间间隔的增大而呈指数衰减。

简单指数平滑法的具体公式如下：

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2y_{t-2} + \cdots$$

其中， α 为平滑系数，满足 $0 < \alpha < 1$ 。

因为 $\tilde{y}_{t-1} = \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2y_{t-3} + \cdots$ ，容易整理得到一个简单的递推公式，即 $\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_{t-1}$ 。

具体实例：

第一期的平滑值为： $\tilde{y}_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)\tilde{y}_0$ ，通常设 $\tilde{y}_0 = y_1$ ，故 $\tilde{y}_1 = y_1$

第二期的平滑值为： $\tilde{y}_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)\tilde{y}_1 = \alpha y_2 + (1-\alpha)y_1$

第三期的平滑值为： $\tilde{y}_3 = \alpha y_3 + (1-\alpha)\tilde{y}_2 = \alpha y_3 + \alpha(1-\alpha)y_2 + (1-\alpha)^2y_1$

其他期的平滑值以此类推。



可见任何预测值都是以前所有的实际观测值的加权平均，且权数由近及远分别按几何级数衰减，满足近期权重重大，远期权重小的要求，并且利用了时间序列中的全部数据信息，它能克服移动平均法的不足之处。由于权重符合指数规律，又具有平滑数据的作用，故称为指数平滑法。

如果使用指数平滑法进行预测，那么预测值总是等于上一期的平滑值，即：

$$\hat{y}_t(1) = \tilde{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \tilde{y}_{t-1}$$

平滑系数 α 的确定与移动平均法中期数的确定类似。如果 $\alpha \rightarrow 0$, $1 - \alpha$ 更接近于 1，权重随着时间的滞后衰减的速度慢，各权重相差不大，也就是说，过去很久的数据仍然对未来有影响，相当于期数 n 很长的移动平均法。反之，如果 α 越大，对近期的数据赋予更多的权重，相当于移动平均法中选择较小的期数 n 。一般对于变化缓慢的序列，通常取比较小的 α ；相反，对于变化迅速的列常取比较大的 α 。经验表明， α 介于 0.1 和 0.5 之间，修匀效果更好。

【例 7.9】对表 7-5 中的航空乘客人数序列分别进行平滑系数 $\alpha=0.05$, 0.15 , 0.4 的指数平滑，如图 7-9 所示，可以看到当 α 取值越小，平滑曲线越光滑，而当 α 取值越大时，平滑曲线的波动幅度更接近原始序列，更能反映数据近期的变化。

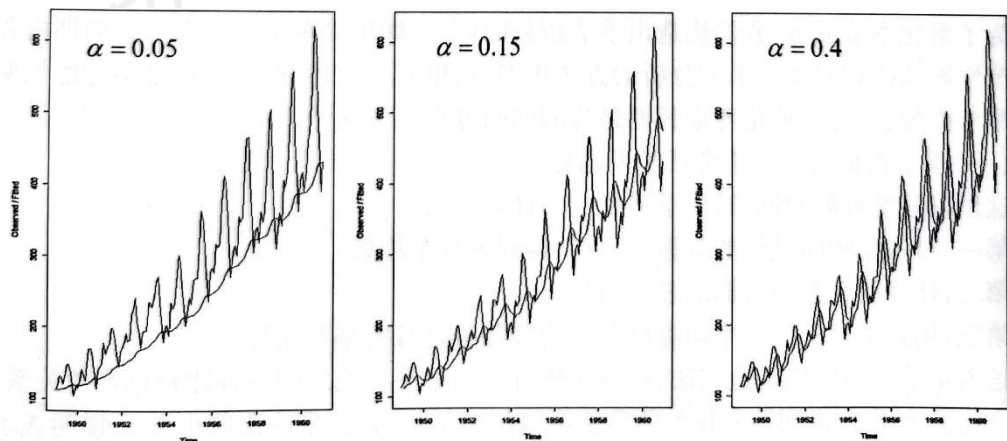


图 7-9 航空乘客人数的指数平滑曲线

