

## 第二节 货币时间价值

### 三、年金终值和现值

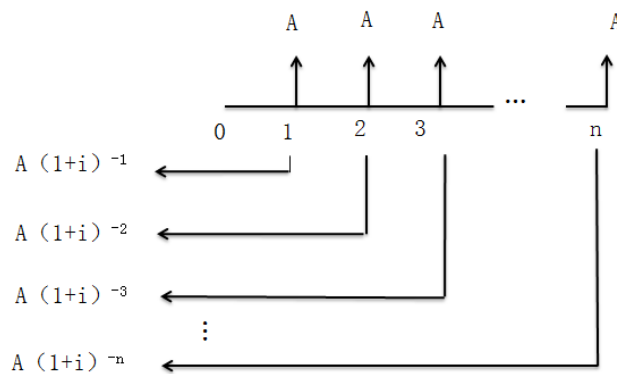
【例 3-4】拟在 5 年后还清 10000 元债务，从现在起每年末等额存入银行一笔款项。假设银行存款利率为 10%，每年需要存入多少元？

$$A = 10000 / (F/A, 10\%, 5) = 1638 \text{ (元)}$$

【结论】普通年金终值与偿债基金互为逆运算，普通年金终值系数与偿债基金系数互为倒数关系。

#### 3. 普通年金现值

普通年金现值是指为在每期期末收付相等金额的款项，现在需要投入或收取的金额。即：已知：A，i，n，求 PA。如图所示：



$$P = A \times (1+i)^{-1} + A \times (1+i)^{-2} + A \times (1+i)^{-3} + \dots + A \times (1+i)^{-n}$$

$$= A \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

式中： $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  被称为年金现值系数，用符号  $(P/A, i, n)$  表示。

推导过程如下：

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + \dots + A(1+i)^{-n}$$

等式两边同乘  $(1+i)$ ：

$$P(1+i) = A + A(1+i)^{-1} + \dots + A(1+i)^{-(n-1)}$$

后式减前式：

$$P(1+i) - P = A - A(1+i)^{-n}$$

$$P \times i = A[1 - (1+i)^{-n}]$$

$$P = A \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

#### 4. 投资回收系数

投资回收系数是指在约定年限内每期等额回收初始投入资本的金额。即：已知：PA，i，n，求 A。

由前述可知： $P = A \times (P/A, i, n)$

导出： $A = P / (P/A, i, n)$



即： $1 / (P/A, i, n)$ ，称为资本回收系数，记作  $(A/P, i, n)$ 。

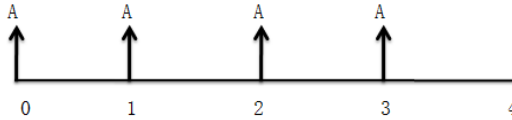
【例 3-6】假设以 10% 的利率借款 20000 元，投资于某个寿命为 10 年的项目，每年至少要收回多少现金才是有利的？

$$A = 20000 / (P/A, 10\%, 10) = 20000 / 6.1446 = 3255 \text{ (元)}$$

【结论】普通年金现值与投资回收互为逆运算，普通年金现值系数与投资回收系数互为倒数关系。

## (二) 预付年金终值和现值

预付年金是指在每期期初收付的年金，又称即付年金或期初年金。如图所示：



### 1. 预付年金终值

$$\begin{aligned} \text{预付年金终值} &= A \times (F/A, i, n) \times (1+i) \\ &= A \times [(F/A, i, n+1) - 1] \end{aligned}$$

推导过程如下：

$$F = A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^n$$

式中各项为等比数列，首项为  $A(1+i)$ ，公比为  $(1+i)$ ，据等比数列的求和公式

$$S_n = \frac{a_1 \times (1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{可得：}$$

$$F = A \times \frac{(1+i) \times [1 - (1+i)^n]}{1 - (1+i)}$$

$$= A \cdot \frac{(1+i) - (1+i)^{n+1}}{-i}$$

$$= A \cdot \left[ \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} + 1 \right]$$

即：预付年金终值系数是在普通年金终值系数基础上，期数加 1、系数减 1 的结果。

【记忆口诀】“终加减”。

### 2. 预付年金现值

$$\begin{aligned} \text{预付年金现值} &= A (P/A, i, n) (1+i) \\ &= A \times [(P/A, i, n-1) + 1] \end{aligned}$$

推导过程如下：

$$P = A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + \dots + A(1+i)^{-(n-1)}$$

式中各项为等比数列，首项为  $A$ ，公比为  $(1+i)^{-1}$ ，据等比数列的求和公式

$$S_n = \frac{a_1 \times (1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{可得：}$$



$$\begin{aligned}
 P &= A \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{1 - (1+i)^{-1}} \\
 &= A \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{\frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i}} \\
 &= A \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}] (1+i)}{i} \\
 &= A \cdot \left[ \frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]
 \end{aligned}$$

即：预付年金现值系数是在普通年金现值系数基础上，期数减 1，系数加 1 的结果。

【记忆口诀】“现减加”

【例 3-8】6 年分期付款购物，每年初付 200 元，设银行利率为 10%，该项分期付款相当于一次现金支付的购价是多少？

$$\begin{aligned}
 P &= A \times [(P/A, i, n-1) + 1] \\
 &= 200 \times [(P/A, 10\%, 5) + 1] \\
 &= 200 \times (3.7908 + 1) = 958.16 \text{ (元)}
 \end{aligned}$$

或：

$$\begin{aligned}
 P &= A \times (P/A, i, n) \times (1+i) \\
 &= 200 \times (P/A, 10\%, 6) \times (1+i) \\
 &= 200 \times 4.3553 \times (1+10\%) = 958.17 \text{ (元)}
 \end{aligned}$$

