

第二节 金融期权价值评估

三、二叉树期权定价模型

(一) 二叉树模型原理

1. 二叉树模型的假设

- (1) 市场投资没有交易成本；
- (2) 投资者都是价格的接受者；
- (3) 允许完全使用卖空所得款项；
- (4) 允许以无风险利率借入或贷出款项；
- (5) 未来股票的价格将是两种可能值中的一个。

2. 应用

在不派发股利的情況下：

$$\text{期权价格} = \frac{1+r-d}{U-d} \times \frac{C_u}{1+r} + \frac{U-1-r}{U-d} \times \frac{C_d}{1+r}$$

实际上是风险中性原理的应用

其中：

上行概率 = $(1+r-d) / (u-d)$

下行概率 = $(u-1-r) / (u-d)$

期权价格 = 上行概率 $\times C_u / (1+r)$ + 下行概率 $\times C_d / (1+r)$

(二) 两期二叉树模型

1. 基本原理

实际是单期二叉树的两次运用，用单期二叉树原理推而广之即可。

2. 例题

【例 7-11】继续采用[例 7-10]中的数据，把 6 个月的时间分为两期，每期 3 个月。变动以后的数据如下：ABC 公司的股票现在的市价为 50 元，看涨期权的执行价格为 52.08 元，每期股价有两种可能：上升 22.56% 或下降 18.4%；无风险利率为每 3 个月 1%。

解题思路：先利用单期定价模型，根据 C_{uu} 和 C_{ud} 计算节点 C_u 的价值，利用 C_{ud} 和 C_{dd} 计算 C_d 的价值；然后，再次利用单期定价模型，根据 C_u 和 C_d 计算 C_0 的价值。从后向前推进。



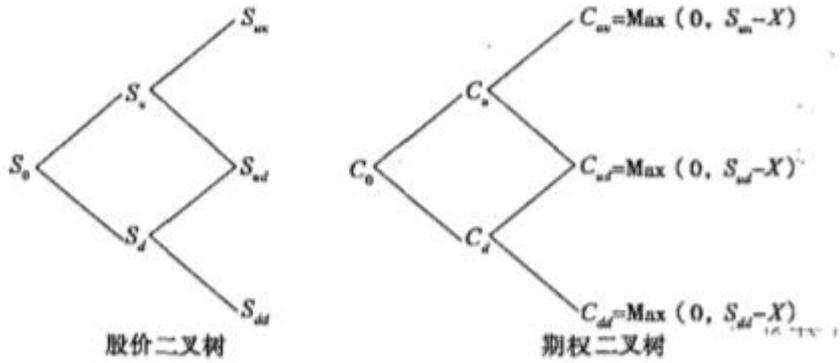


图 7-13

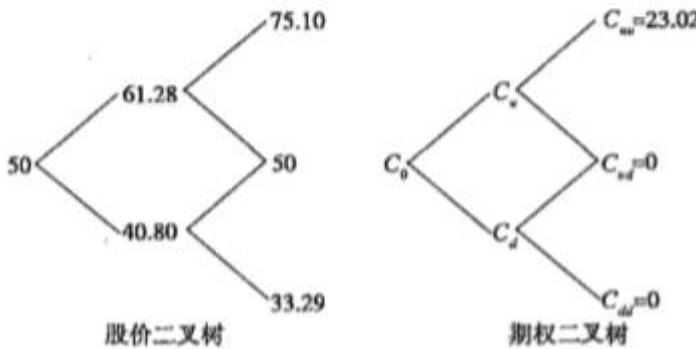


图 7-14

(三) 多期二叉树模型

1. 基本原理：与两期模型一样，从后向前逐级推进，多了些层次而已。

2. 股价上升与下降的百分比的确定：

期数增加以后带来的主要问题是股价上升与下降的百分比如何确定问题。期数增加以后，要调整价格变化的升降幅度，以保证年报酬率的标准差不变。

把年报酬率标准差和升降百分比联系起来的公式是：

$$u = 1 + \text{上升百分比} = e^{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d = 1 - \text{下降百分比} = 1/u$$

式中：

e-自然常数，约等于 2.7183；

σ -标的资产连续复利报酬率的标准差；

t-以年表示的时段长度

【例 7-10】采用的标准差 $\sigma = 0.4068$

$$U = e^{0.4068\sqrt{0.5}} = e^{0.2877} = 1.3333$$

该数值可以利用函数计算器直接求得，或者使用 Excel 的 EXP 函数功能，输入 0.2877，就可以得到以 e 为底、指数为 0.2877 的值为 1.3333。

$$d = 1 \div 1.3333 = 0.75$$



【例 7-12】某看涨期权的到期时间为 6 个月（到期前不发放股利），分为 6 期，即每月 1 期（ $t=1/12$ ）。标的股票当前价格 $S_0=50$ 元，执行价格 52.08 元，年无风险利率为 4%，股价波动率（标准差）0.4068。采用 6 期二叉树模型计算该看涨期权价值如下：

1. 确定每期股价变动乘数及上行概率

$$\text{上行乘数 } u = e^{0.4068 \cdot \sqrt{1/12}} = 1.1246$$

$$\text{下行乘数 } d = 1 \div 1.1246 = 0.8892$$

$$\text{上行报酬率} = 1.1246 - 1 = 12.46\%$$

$$\text{下行报酬率} = 0.8892 - 1 = -11.08\%$$

$$\text{月无风险收益率} = 4\% / 12$$

$$4\% / 12 = \text{上行概率} \times 12.46\% + (1 - \text{上行概率}) \times (-11.08\%)$$

解得：

$$\text{上行概率} = \frac{4\% / 12 + 11.08\%}{12.46\% + 11.08\%} = 0.4848$$

$$\text{下行概率} = 0.5152$$

表 7-11 股票期权的 6 期二叉树 单位：元

| 序号 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 时间（年） | 0 | 0.083 | 0.167 | 0.250 | 0.333 | 0.417 | 0.500 |
| 上行乘数 | 1.1246 | | | | | | |
| 下行乘数 | 0.8892 | | | | | | |
| 股票价格 | 50 | 56.23 | 63.24 | 71.12 | 79.98 | 89.94 | 101.15 |
| | | 44.46 | 50.00 | 56.23 | 63.24 | 71.12 | 79.98 |
| | | | 39.53 | 44.46 | 50.00 | 56.23 | 63.24 |
| | | | | 35.15 | 39.53 | 44.46 | 50.00 |
| | | | | | 31.26 | 35.15 | 39.53 |
| | | | | | | 27.80 | 31.26 |
| | | | | | | | 24.72 |

执行价格=52.08，上行概率=0.4848，下行概率=0.5152

| 序号 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 买入期权价格 | 5.30 | 8.52 | 13.26 | 19.84 | 28.24 | 38.04 | 49.07 |
| | | 2.30 | 4.11 | 7.16 | 12.05 | 19.21 | 27.90 |
| | | | 0.61 | 1.26 | 2.61 | 5.39 | 11.16 |
| | | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | 0 | 0 | 0 |



| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|---|---|
| | | | | | | 0 | 0 |
| | | | | | | | 0 |

其中：

期权到期日价值：

$$C_{u6} = S_{u6} - X = 101.15 - 52.08 = 49.07 \text{ (元)}$$

$$C_{du5} = S_{du5} - X = 79.98 - 52.08 = 27.90 \text{ (元)}$$

$$C_{d2u4} = S_{d2u4} - X = 63.24 - 52.08 = 11.16 \text{ (元)}$$

【例题·计算分析题】假设 A 公司的股票现在的市价为 40 元。有 1 份以该股票为标的资产的看涨期权，执行价格为 40.5 元，到期时间是 1 年（到期前不发股利）。根据股票过去的历史数据所测算的连续复利报酬率的标准差为 0.5185，无风险利率为每年 4%，拟利用两期二叉树模型确定看涨期权的价格。

要求：

- (1) 若保证年报酬率的标准差不变，股价的上行乘数和下行乘数为多少？
- (2) 建立两期股价二叉树与两期期权二叉树表：

股价二叉树

| | | | |
|-------|--|--|--|
| 时间（年） | | | |
| 股价二叉树 | | | |
| | | | |
| | | | |

期权二叉树

| | | | |
|-------|--|--|--|
| 时间（年） | | | |
| 期权二叉树 | | | |
| | | | |
| | | | |

- (3) 利用两期二叉树模型确定看涨期权的价格。

【答案】

- (1)

$$\text{上行乘数 } u = e^{\sigma\sqrt{t}} = e^{0.5185\sqrt{0.5}} = e^{0.3666} = 1.4428$$

$$\text{下行乘数 } d = 1 \div 1.4428 = 0.6931$$

- (2) (3)

股价二叉树

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 时间 | 0 | 0.5 | 1 |
| 股价二叉树 | 40.00 | 57.71 | 83.27 |
| | | 27.72 | 40.00 |

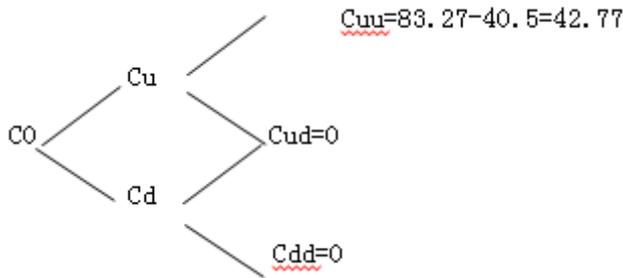


| | | | |
|--|--|--|-------|
| | | | 19.22 |
|--|--|--|-------|

期权二叉树

| | | | |
|-------|------|-------|-------|
| 时间 | 0 | 0.5 | 1 |
| 期权二叉树 | 7.81 | 18.28 | 42.77 |
| | | 0 | 0 |
| | | | 0 |

$C_{uu} = 83.27 - 40.5 = 42.77$ (元)



由: $2\% = \text{上行概率} \times 44.28\% + (1 - \text{上行概率}) \times (-30.69\%)$

得: 上行概率 = 0.4360

下行概率 = $1 - 0.4360 = 0.5640$

$C_u = (\text{上行概率} \times \text{上行期权价值} + \text{下行概率} \times \text{下行期权价值}) \div (1 + \text{持有期无风险利率}) = (0.4360 \times 42.77 + 0.5640 \times 0) / (1 + 2\%) = 18.28$ (元)

$C_d = (\text{上行概率} \times \text{上行期权价值} + \text{下行概率} \times \text{下行期权价值}) \div (1 + \text{持有期无风险利率}) = 0$

期权价格 $C_0 = (0.4360 \times 18.28 + 0.5640 \times 0) / (1 + 2\%) = 7.81$ (元)

